УДК 517.538.5+517.538.6

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ МНОГОЧЛЕНОВ ЭРМИТА – ПАДЕ ПЕРВОГО РОДА

***А.А. Драпеза**, аспирант; **Н.В. Рябченко**, ассистент*
*Научный руководитель – **А.П. Старавойтов**, д.ф.–м.н., профессор кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений*
Гомельский государственный университет им. Ф.Скорины

Пусть $f = (f_1, f_2, \ldots, f_k)$– набор k степенных рядов

$$f_j(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f_i^j}{z^{i+1}}, j = 1,2,\ldots,k \qquad (1.1)$$

с комплексными коэффициентами. Множество k–мерных мультииндексов (индексов), т.е. упорядоченных k натуральных чисел $n = (n_1, n_2, \ldots, n_k)$, обозначим $\mathbb{N}^k$. Порядок индекса $n = (n_1, n_2, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}^k$ — это сумма $|n| := n_1 + n_2 + \ldots + n_k$. Рассмотрим следующую задачу Эрмита – Паде [1; гл.4, § 3]:

Задача ЭП. *Для заданного мультииндекса $n = (n_1, n_2 \ldots, n_k)$ найти такие не равные тождественно нулю одновременно многочлены $A_1 = A_n^1, \ldots, A_k = A_n^k$, что $degA_1 \leqslant n_1 - 1$, ..., $degA_k \leqslant n_k - 1$ и для некоторого многочлена $B = B_n$,*

$$L_n(z) := \sum_{j=1}^{k} A_j(z) f_j(z) - B(z) = \frac{c_n}{z^{|n|}} + \cdots.$$

Многочлен $B(z) = B_n(z)$ является полиномиальной частью ряда $\sum_{j=1}^{k} A_j(z) f_j(z)$.

Введем необходимые обозначения. Зафиксируем индекс $n \in \mathbb{N}^k$ и для каждого $j = 1, 2, \ldots, k$ рассмотрим матрицы– столбцы порядка $(|n| - 1) \times 1$

$$F_i^j = \begin{pmatrix} f_{i-1}^j & f_i^j & \cdots & f_{|n|+i-3}^j \end{pmatrix}^T, \ i = 1, 2, \ldots, n_j,$$

и матрицы порядка $(|n| - 1) \times |n_j|$

$$F^j = \begin{bmatrix} F_1^j & F_2^j & \cdots & F_{nj}^j \end{bmatrix}$$

где C^T является матрицей, транспонированной к матрице C. Далее рассмотрим матрицу порядка $(|n| - 1) \times |n|$

$$F_n = \begin{bmatrix} F^1 & F^2 & \cdots & F^k \end{bmatrix}$$

и функциональные матрицы– строки порядка $1 \times |n|$

$$E_1(z) = \begin{pmatrix} 1 & z & \cdots & z^{n_1-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_2(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & z & \cdots & z^{n_2-1} & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$E_k(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 & z & \ldots & z^{n_k-1} \end{pmatrix},$$

$$E(z) = E_1(z) + \cdots + E_k(z) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & z & \ldots & z^{n_1-1} & 1 & z & \ldots & z^{n_2-1} & \ldots & 1 & z & \ldots & z^{n_k-1} \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $G_j(z)$ матрицу–строку, которая при $n_j > 1$ получается в результате замены в матрице $E_j(z)$ ненулевых элементов: 1 заменяем на 0, z заменяем на f_o^j, z^2 заменяем на $f_o^j z + f_1^j$

и т.д., наконец, z^{n_j-1} заменяем на $\sum_{i=0}^{n_j-2} f_i^j z^{n_j-i-2}$ (при $n_j = 1$ в $E_j(z)$ единственный ненулевой элемент 1 заменяем 0). Матрицу–строку $G(z)$ определим равенством

$$G(z) = G_1(z) + \cdots + G_k(z).$$

Если в матрице F_n порядка $(|n| - 1) \times |n|)$ добавить в качестве последней строки строку $E_j(z)$, то получим квадратную матрицу. Обозначим определитель этой матрицы через $A_j(z)$. Тогда при $j = 1,2, \dots k$

$$A_j(z) =$$

$$\begin{vmatrix} f_0^1 & \cdots & f_{n_1-1}^1 & \cdots & f_0^j & f_1^j & \cdots & f_{n_j-1}^j & \cdots & f_0^k & \cdots & f_{n_k-1}^k \\ f_1^1 & \cdots & f_{n_1}^1 & \cdots & f_1^j & f_2^j & \cdots & f_{n_j}^j & \cdots & f_1^k & \cdots & f_{n_k}^k \\ . & \cdots & . & \cdots & . & . & \cdots & . & \cdots & . & \cdots & . \\ f_{|n|-2}^1 & \cdots & f_{|n|+n_1-3}^1 & \cdots & f_{|n|-2}^j & f_{|n|-1}^j & \cdots & f_{|n|+n_j-3}^j & \cdots & f_{|n|-2}^k & \cdots & f_{|n|+n_k-3}^k \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & z & \cdots & z^{n_j-1} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

Последний определитель обозначим (1.2)

Если в определителе (1.2) последнюю строку $E_j(z)$ заменить строкой $G(z)$ получим новый определитель. Его обозначим через $B(z)$. И наконец, если последнюю строку определителя (1.2) заменить матрицей–строкой

$$F_i^n = \begin{pmatrix} f_{|n|+i-2}^1 & f_{|n|+i-1}^1 & \cdots & f_{|n|+n_1+i-3}^1 & \cdots & f_{|n|+i-2}^k & f_{|n|+i-1}^k & \cdots & f_{|n|+n_k+i-3}^k \end{pmatrix},$$

то полученный определитель обозначим через $d_{n,i}$.

Определение. *Индекс $n \in \mathbb{N}^k$ назовем вполненормальным для f, если ранг матрицы F_n равен* $|n| - 1$.

Теорема 1. *Для того, чтобы для фиксированного индекса $n \in \mathbb{N}^k$ задача Эрмита – Паде имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы индекс n был вполненормальным для f, т.е. $rang\, F_n = |\, n| - 1$.*

В случае, если индекс n является вполненормальным, при определенном выборе мультипликативного множителя для решений (A, B) задачи Эрмита – Паде справедливы следующие детерминантные представления:

$$A_j(z) = \; det\begin{bmatrix} F_n & E_j(z)\end{bmatrix}^T := \begin{bmatrix} F_n \\ E_j(z)\end{bmatrix}, j = 1 \dots k \tag{1.3}$$

$$B(z) = \; det[F_n \;\; G(z)\,]^T := \begin{bmatrix} F_n \\ G(z)\end{bmatrix} \quad , \tag{1.4}$$

$$L_n(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_{n,i}^j}{z^{|n|+i-1}}. \tag{1.5}$$

В развернутом виде многочлены $A_j(z)$ представлены равенствами (1.2).

Список использованных источников

1. Никишин, Е.М. Рациональные аппроксимации и ортогональность/Е.М. Никишин, В.Н. Сорокин. – М.: Наука, 1988.

2. Stahl, H. Asymptotics for quadratic Hermite–Padé polynomals associated with the exponential function/H. Stahl/Electronic Trans. Num. Anal. – 2002. – № 14 – P. 193 – 220.

3. Бейкер мл., Дж. Аппроксимации Паде. 1. Основы теории. 2. Обобщения и приложения/Дж. Бейкер мл., П. Грейвс–Моррис. – М.: Мир, 1986.